

# 拡張 Newton-Euler 法による拘束運動繰り返し計算法と 順動力学解法への応用

西口淳平 李啓托 見浪護 矢納陽 (岡山大学)

## Iterative Calculation Method for Constraint Motion by Extended Newton-Euler Method and Application for Forward Dynamics

\*J. Nishiguchi, G. Lee, M. Minami and A. Yanou (University of Okayama)

**Abstract**– This paper proposes iterative calculation method for representing constraint motion of robot manipulator utilizing inverse dynamic calculation of Newton-Euler method, solving method of forward dynamics problem. This method has a merit that enables us to calculate forward dynamics recursively with no use of explicit representation of equation of motion. Then, we applied this method to 3-link manipulator and evaluated its validity by numerical simulations.

**Key Words:** Newton-Euler method, Constraint motion

### 1 緒言

これまで、マニピュレータの動力学について、シミュレーションによる動力学解析や制御手法の検証等を目的に研究がされてきている。マニピュレータの動力学の運動方程式の2つの主要な導出法としてLagrange法とNewton-Euler法(NE法)がある<sup>1)</sup>。

NE法は衛星のような開鎖のツリー構造<sup>2)</sup>や、人体のような生物学的構造<sup>3), 4)</sup>に適応されてきたが、計算量が多く実時間での使用には動力学の計算が遅すぎた。そこで1980年に計算量を減らすために再公式化され<sup>5)</sup>、1982年にWalker, OrinによってNE法を用いた順動力学問題の解法とその有効性が示された<sup>6)</sup>。その後、NE法は非剛性マニピュレータのモデルへの応用<sup>7)</sup>等、様々な所で利用されている。

今回、私達はNE法の逆動力学計算を利用したロボットマニピュレータの拘束運動を表現するための繰り返し計算法を提案し、順動力学計算の解法を示す。NE法にはそれぞれのリンクを単一物体として扱い、ロボットの実際の運動を生成しない内力、内部トルクの計算を可能であるというメリットがあるため、ヒューマノイドロボットの足の衝突・拘束運動時の各関節にかかる内力計算等の応用が考えられる。私達はこの方法を3リンクマニピュレータに適応し、その妥当性を数値シミュレーションにより評価した。

### 2 拘束運動時のNewton-Euler法による運動方程式の導出

Fig. 1に示すような地面から手先に抗力 $f_n$ と摩擦力 $f_t$ の働く $n$ 本の剛体リンクを持つ $n$ 自由度の直列マニピュレータを考え、link- $i$ に固定された座標系 $\Sigma_i$ に基づき運動方程式を導出する。手先が地面に拘束されているときの拘束条件は手先の位置ベクトルを $r(q)$ とし、式(1)として定義できる。

$$C(r(q)) = 0 \quad (1)$$

ここで拘束運動について次の2つの仮定を行う。(i) 抗力 $f_n$ 、地面と足の間に作用する摩擦力 $f_t$ は直交する。(ii)  $f_t$ は抗力に比例して決定される： $f_t = Kf_n$  ( $K$ は摩擦係数： $0 < K \leq 1$ )。

まず、Newton-Euler法の順動力学計算として根元のリンクから先端のリンクに向かってlink- $i$ の関節角速度 ${}^i\omega_i$ 、関節角加速度 ${}^i\dot{\omega}_i$ 、原点における並進加速度 ${}^i\ddot{p}_i$ 、質量中心における並進加速度 ${}^i\ddot{s}_i$ を以下の式から計算する。

$${}^i\omega_i = {}^{i-1}R_i^T {}^{i-1}\omega_{i-1} + e_{z_i} \dot{q}_i \quad (2)$$

$${}^i\dot{\omega}_i = {}^{i-1}R_i^T {}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} + e_{z_i} \ddot{q}_i + {}^i\omega_i \times (e_{z_i} \dot{q}_i) \quad (3)$$

$${}^i\ddot{p}_i = {}^{i-1}R_i^T \left\{ {}^{i-1}\ddot{p}_{i-1} + {}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} \times {}^{i-1}\hat{p}_i + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times ({}^{i-1}\omega_{i-1} \times {}^{i-1}\hat{p}_i) \right\} \quad (4)$$

$${}^i\ddot{s}_i = {}^i\ddot{p}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i\hat{s}_i + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i\hat{s}_i) \quad (5)$$

ここで、 ${}^{i-1}R_i$ は $\Sigma_{i-1}$ から $\Sigma_i$ への回転行列、 $e_{z_i} = [0, 0, 1]^T$ はlink- $i$ の回転軸を表す単位ベクトル、 ${}^{i-1}\hat{p}_i$ は $\Sigma_{i-1}$ の原点から $\Sigma_i$ までの位置ベクトル、 ${}^i\hat{s}_i$ は $\Sigma_i$ の原点からlink- $i$ の質量中心までの位置ベクトルを表している。

次に逆動力学計算に基づいて、先端のリンクから根元のリンクに向かってlink- $i$ におけるNewtonの方程式及びEulerの方程式を以下の式(6)~(8)に基づいて導出する。 ${}^i f_i$ 、 ${}^i n_i$ はそれぞれリンク $(i-1)$ からリンク $i$ に加えられる力とモーメントを表す。手先からは地面

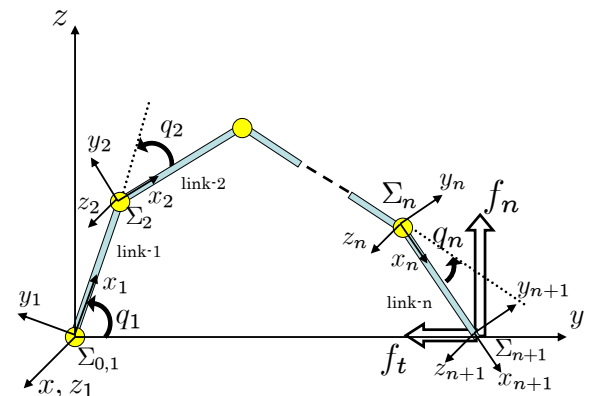


Fig. 1: n-link manipulator

から受ける抗力・摩擦力の反作用の力が発生するため， ${}^{n+1}f_{n+1}$  は式 (6) のように計算すればよい．

$${}^{n+1}f_{n+1} = -{}^0R_{n+1}^T \left\{ \frac{\left(\frac{\partial C}{\partial r}\right)}{\left\|\frac{\partial C}{\partial r}\right\|} f_n - \frac{\dot{r}}{\|\dot{r}\|} K f_n \right\} \quad (6)$$

$${}^i f_i = {}^i R_{i+1} {}^{i+1} f_{i+1} + m_i {}^i \dot{s}_i \quad (7)$$

$${}^i n_i = {}^i R_{i+1} {}^{i+1} n_{i+1} + {}^i I_i {}^i \dot{\omega}_i + {}^i \omega_i \times ({}^i I_i {}^i \omega_i) + {}^i \dot{s}_i \times (m_i {}^i \dot{s}_i) + {}^i \hat{p}_{i+1} \times ({}^i R_{i+1} {}^{i+1} f_{i+1}) \quad (8)$$

抗力  $f_n$  は以下の式より与えられる．詳しい導出方法は次章で述べる．

$$f_n = A^{-1}(a - d^T \tau) \quad (9)$$

全ての関節が  ${}^i z_i$  軸回りの回転を行うように  $\Sigma_i$  を定めた場合，単位ベクトル  $e_z = [0, 0, 1]^T$  によって，各回転関節の運動方程式が以下のように計算される．

$$\tau_i = (e_{z_i})^T {}^i n_i + d_i \dot{q}_i \quad (10)$$

$i = 1, \dots, n$  における式 (10) を一般的な表現に改めると式 (11) を得る．

$$M(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + g(q) + D\dot{q} - (j_c - j_t K) f_n = \tau \quad (11)$$

ここで， $M(q)$  は  $n \times n$  の慣性行列， $h(q, \dot{q})$ ， $g(q)$  はそれぞれ遠心力/コリオリ力の項及び重力項を表す  $n \times 1$  のベクトル， $D$  は関節の粘性摩擦係数を表す  $n \times n$  の対角行列  $D = \text{diag}[d_1, d_2, \dots, d_n]$ ， $\tau$  は  $n \times 1$  の入力トルクベクトル， $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$  は  $n \times 1$  の関節角度ベクトルである．また， $j_c$  と  $j_t$  は以下のように定義される．

$$j_c = \left(\frac{\partial r}{\partial q^T}\right)^T \frac{\left(\frac{\partial C}{\partial r}\right)}{\left\|\frac{\partial C}{\partial r}\right\|}, \quad j_t = \left(\frac{\partial r}{\partial q^T}\right)^T \frac{\dot{r}}{\|\dot{r}\|} \quad (12)$$

### 3 抗力 $f_n$ の導出

本章では抗力  $f_n$  の導出方法について述べる．マニピュレータの手先拘束状態の運動方程式，拘束条件は式 (11)，(1) で表される．式 (1) を時間  $t$  で 2 階微分し， $\dot{q}$  の拘束条件を求めると，

$$\dot{q}^T \left[ \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial C}{\partial q^T} \right) \right] \dot{q} + \left( \frac{\partial C}{\partial q^T} \right) \ddot{q} = 0 \quad (13)$$

が得られる．マニピュレータが常に拘束面に拘束されるためには，式 (11) の解  $q(t)$  が時間  $t$  に無関係に式 (1) を満たさなければならない．式 (1) の時間微分によって得られた式 (13) を満たす  $\dot{q}$  と式 (11) の  $\ddot{q}$  が同じ値をとるとき，式 (11) の  $q(t)$  は式 (1) を満たすことになる<sup>8)</sup>．まず，式 (11)，(13) から  $\ddot{q}$  を消去すると

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial C}{\partial q^T} \right) M^{-1} \left( \frac{\partial C}{\partial q^T} \right)^T \frac{f_n}{\left\|\frac{\partial C}{\partial r}\right\|} \\ &= \left( \frac{\partial C}{\partial q^T} \right) M^{-1} \left( J_t^T K f_n + D\dot{q} + h + g - \tau \right) \\ & \quad - \dot{q}^T \left[ \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial C}{\partial q^T} \right) \right] \dot{q} \end{aligned} \quad (14)$$

が得られる．ここで，

$$\left( \frac{\partial C}{\partial q^T} \right) M^{-1} \left( \frac{\partial C}{\partial q^T} \right)^T = m_c \quad (15)$$

と置くことにより，

$$m_c f_n = \left\| \frac{\partial C}{\partial r^T} \right\| \left\{ \left( \frac{\partial C}{\partial q^T} \right) M^{-1} (J_t^T K f_n + D\dot{q} + h + g - \tau) - \dot{q}^T \left[ \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial C}{\partial q^T} \right) \right] \dot{q} \right\} \quad (16)$$

となり，また

$$d^T = \left\| \frac{\partial C}{\partial r^T} \right\| \left( \frac{\partial C}{\partial q^T} \right) M^{-1} \quad (17)$$

と置くと式 (16) は以下ようになる．

$$m_c f_n = d^T j_t K f_n - d^T \tau + d^T \{ D\dot{q} + h + g \} - \left\| \frac{\partial C}{\partial r^T} \right\| \dot{q}^T \left[ \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial C}{\partial q^T} \right) \right] \dot{q} \quad (18)$$

ここで

$$a = d^T \{ D\dot{q} + h + g \} - \left\| \frac{\partial C}{\partial r^T} \right\| \dot{q}^T \left[ \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial C}{\partial q^T} \right) \right] \dot{q} \quad (19)$$

とすると

$$m_c f_n = d^T j_t K f_n - d^T \tau + a \quad (20)$$

となる．さらに

$$A = m_c - d^T j_t K \quad (21)$$

と置くことにより，

$$A f_n = a - d^T \tau \quad (22)$$

となり，拘束点の抗力  $f_n$  は入力トルク  $\tau$  との代数方程式から求めることができる．

#### 3.1 ヤコビ行列の微分の導出

式 (19) の右辺の第二項目を式変形をすると式 (23) のようになる．ただし，手先位置  $r$  の  $q$  に関するヤコビ行列を  $(\partial r / \partial q^T) = J$  と置く．

$$\begin{aligned} \dot{q}^T \left[ \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial C}{\partial q^T} \right) \right] \dot{q} &= \frac{dq^T}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial C}{\partial r^T} \frac{\partial r}{\partial q^T} \right) \right] \dot{q} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial C}{\partial r^T} J \right) \dot{q} \\ &= \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial C}{\partial r^T} \right) J + \frac{\partial C}{\partial r^T} \frac{dJ}{dt} \right] \dot{q} \end{aligned} \quad (23)$$

よって  $a$  を数値計算で求めるにはヤコビ行列の微分を求める必要がある．ここでは，その導出方法について述べる．

まず，ヤコビ行列  $J$  は次のように導出される．

$$J = \begin{bmatrix} {}^0 z_1 \times {}^0 p_{E,1} & {}^0 z_2 \times {}^0 p_{E,2} & \cdots & {}^0 z_n \times {}^0 p_{E,n} \\ {}^0 z_1 & {}^0 z_2 & \cdots & {}^0 z_n \end{bmatrix} \quad (24)$$

ここで， ${}^0 p_E$  はマニピュレータの根元から手先までのベクトルを表し， ${}^0 z_i$ ， ${}^0 p_{E,i}$  は以下のように定義される．

$${}^0 z_i = {}^0 R_i {}^i e_z \quad (25)$$

$${}^i e_z = (0, 0, 1)^T \quad (26)$$

$${}^0 p_{E,i} = {}^0 p_E - {}^0 p_i \quad (27)$$

式 (25),(27) の両辺を時間  $t$  で微分すると以下の式が得られる .

$$\begin{aligned} {}^0\dot{z}_i &= {}^0\dot{R}_i^i e_z + {}^0R_i^i \dot{e}_z \\ &= {}^0\dot{R}_i^i e_z \\ &= {}^0\omega_i \times {}^0R_i^i e_z \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} {}^0\dot{p}_{E,i} &= {}^0\dot{p}_E - {}^0\dot{p}_i \\ &= J_p \dot{q} - J_{p_i} \dot{q} \end{aligned} \quad (29)$$

ただし,  $J_{p_i} \in R^{3 \times n}$  は,  $p_i$  の  $q$  に関するヤコビ行列の最初の行から第 3 行目までの行列を表す .

次に  ${}^0z_i \times {}^0p_{E,i}$  を時間  $t$  で微分すると式 (28), (29) より以下のようになる .

$$\begin{aligned} \frac{d({}^0z_i \times {}^0p_{E,i})}{dt} &= {}^0\dot{z}_i \times {}^0p_{E,i} + {}^0z_i \times {}^0\dot{p}_{E,i} \\ &= ({}^0\omega_i \times {}^0R_i^i e_z) \times {}^0p_{E,i} \\ &\quad + {}^0z_i \times (J_p \dot{q} - J_{p_i} \dot{q}) \end{aligned} \quad (30)$$

したがって, ヤコビ行列の微分は以下の式から計算することができる .

$$j = \begin{bmatrix} ({}^0\omega_1 \times {}^0R_1^1 e_z) \times {}^0p_{E,1} + {}^0z_1 \times (J_p \dot{q} - J_{p_1} \dot{q}) & \cdots \\ {}^0\omega_1 \times {}^0R_1^1 e_z & \cdots \\ ({}^0\omega_n \times {}^0R_n^n e_z) \times {}^0p_{E,n} + {}^0z_n \times (J_p \dot{q} - J_{p_n} \dot{q}) \\ {}^0\omega_n \times {}^0R_n^n & \end{bmatrix} \quad (31)$$

#### 4 順動力学問題の解法

多リンク・多自由度を有する対象物に関して, 式 (11) に含まれる  $M(q)$ ,  $h(q, \dot{q})$ ,  $g(q)$  を直接計算することは一般に困難である . しかし, 順動力学問題の解法を用いることで効率的な数値計算の実行が可能となる .

まず  $b = h(q, \dot{q}) + g(q) + D\dot{q}$  として, 式 (11) の左辺を  $\tau_p$  と置く .

$$M(q)\ddot{q} + b - (j_c - j_t K) f_n = \tau_p \quad (32)$$

式 (7)–(10) に示す逆動力学計算を  $\tau_p = INV(q, \dot{q}, \ddot{q}, g, f_n, K)$  と表現する時,

$$M(q)\ddot{q} + b - (j_c - j_t K) f_n = INV(q, \dot{q}, \ddot{q}, g, f_n, K) \quad (33)$$

が成立する . ここで, 式 (33) に  $\ddot{q} = 0$ ,  $f_n = 0$  を代入すると  $b = INV(q, \dot{q}, 0, g, 0, K)$  が得られ, 次に  $\dot{q} = 0$ ,  $\ddot{q} = e_i$ ,  $g = 0$ ,  $f_n = 0$  を式 (33) に代入すると  $M_i = M(q)e_i = INV(q, 0, e_i, 0, 0, K)$  となる .  $M_i$  は慣性行列の第  $i$  列を表すベクトル,  $e_i$  は第  $i$  番目の要素に '1' を持つ単位ベクトル  $e_i = [0, \dots, 1(i), 0, \dots, 0]^T$  であり,  $M(q)$  の要素が列毎に計算される . そして,  $j_c$ ,  $j_t$  は以下のようにして求めることができる .

$$j_c = INV(q, 0, 0, 0, -1, 0) \quad (34)$$

$$j_c - j_t = INV(q, 0, 0, 0, -1, 1) = \tilde{\tau} \quad (35)$$

$$j_t = j_c - \tilde{\tau} \quad (36)$$

これより式 (17)–(19) の  $A$ ,  $a$ ,  $d^T$  が求まるため, 式 (22) より  $f_n$  を計算することができる .

ここで,  $b_n = b - (j_c - j_t K) f_n$  と置くと,  $\ddot{q} = 0$  を代入して  $b_n = INV(q, \dot{q}, 0, g, f_n, K)$  が得られる . したがって, 拘束運動時の各リンクの角加速度  $\ddot{q}$  は以下のように計算される .

$$\ddot{q} = M^{-1}(\tau - b_n) \quad (37)$$

#### 5 数値シミュレーション

本章では第 2 章～第 4 章で述べた方法で拘束条件式 (1) を満たしながら運動することを 7 つのシミュレーションによって確認した . シミュレーション環境はプログラム作成のため “Borland C++ Builder Professional Ver. 5.0” を用い, 表示には “OpenGL Ver. 1.5.0” を用いた . 尚, サンプリングタイムは  $1.0 \times 10^{-2}$  [sec], 地面の摩擦係数は  $f_t = 0.2 f_n$  である .

シミュレーションは Fig. 2 で示す 3 リンクマニピュレータで行う . 物理パラメータは, それぞれ基準のリンクの質量を  $m_i = 1.0$  [kg], 長さを  $l_i = 0.5$  [m], 各関節の粘性摩擦係数を  $d_i = 3.0$  [N·m·s/rad] と設定し, Fig. 2 の姿勢 ( $q = [-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}]^T$ ) を初期姿勢とする .

まず, 入力トルク  $\tau$  を変化させてシミュレーションを行う . 入力に (i)  $\tau = [-3, -3, -3]^T$ , (ii)  $\tau = [3 \sin \frac{2\pi}{10} t, 3 \sin \frac{2\pi}{10} t, 3 \sin \frac{2\pi}{10} t]^T$ , (iii)  $\tau = [-3 \cos 2\pi t, -3 \sin 2\pi t, 3 \cos 2\pi t]^T$  を与えたときのリンク 3 の先端の  $z$  座標  $z_3$  と各リンクの角度  $q_1, q_2, q_3$  の値の時間変化をそれぞれ Figs. 3~5 に示す . これらのグラフから任意の入力を与えても常に拘束条件を満たすことがわかる .

次に, 各リンクの質量  $m_i$  と各関節の粘性摩擦係数  $d_i$  をそれぞれ変化させて, 自由応答シミュレーションを行う . (iv) 各リンクの質量を 2 倍にしたとき, (v) 各リンクの質量を 1/2 倍にしたとき, (vi) 各関節の粘性摩擦係数を 2 倍にしたとき, (vii) 各関節の粘性摩擦係数を 1/2 倍にしたときのリンク 3 の先端の  $z$  座標  $z_3$  と各リンクの角度  $q_1, q_2, q_3$  の値の時間変化をそれぞれ Figs. 6~9 に示す . これらのグラフから各リンクの質量, 各関節の粘性摩擦係数を変化させても常に拘束条件を満たすことがわかる .

以上のシミュレーションから式 (11) のパラメータを変化させたときに, 今回提案する繰り返し計算法で拘束状態を表現することができる事が確認できた .

#### 6 結言

本論文では, Newton-Euler 法の逆動力学計算を利用した拘束運動を表現するための繰り返し計算法について

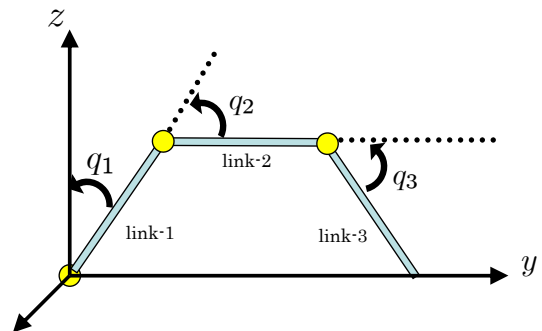


Fig. 2: 3-link manipulator (initial angle)

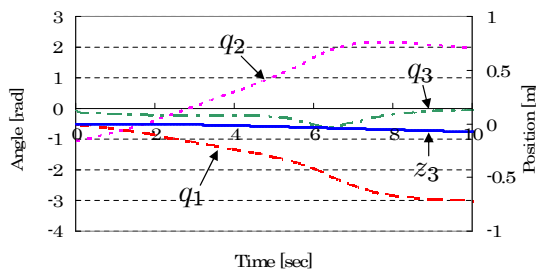


Fig. 3: Hand position and joint angle (i)

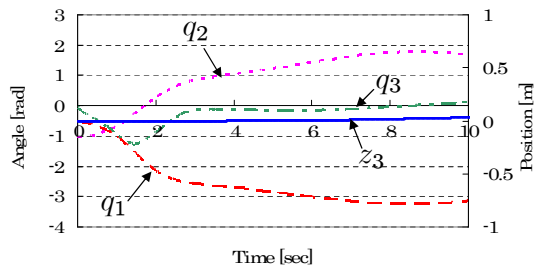


Fig. 4: Hand position and joint angle (ii)

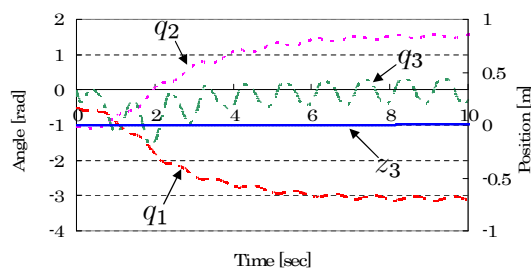


Fig. 5: Hand position and joint angle (iii)

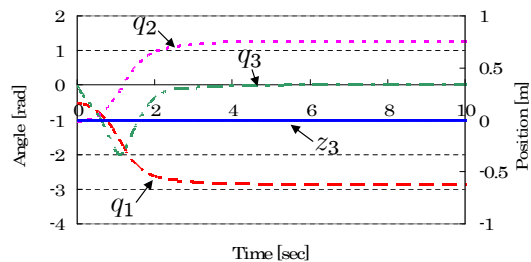


Fig. 6: Hand position and joint angle (iv)

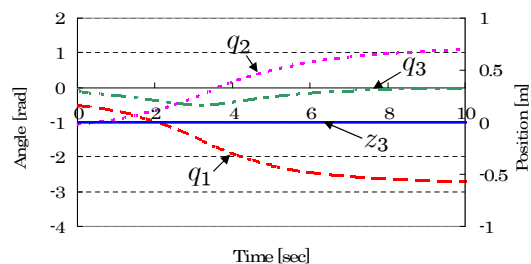


Fig. 7: Hand position and joint angle (v)

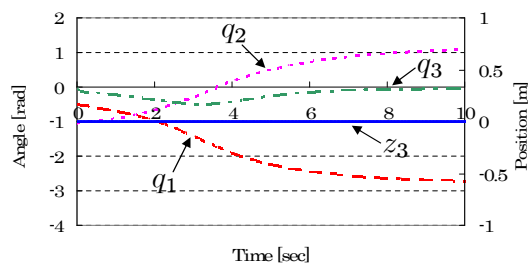


Fig. 8: Hand position and joint angle (vi)

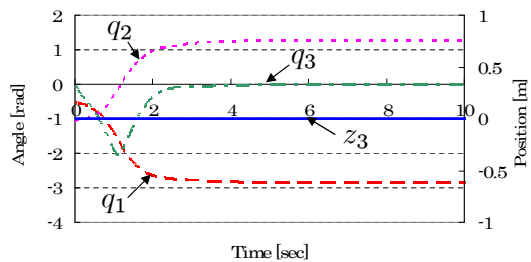


Fig. 9: Hand position and joint angle (vii)

て提案し、順動力学計算の解法について示した。またシミュレーション結果から、この計算法によりマニピュレータの手先拘束を表現することを示した。

今後の方針としては、今回提案した計算法について拘束条件が2つ以上ある多点拘束の場合に拡張し、数値シミュレーションにより評価していくことが挙げられる。

#### 参考文献

- 1) M. Brady, J. M. Hollerbach, T. L. Johnson, T. Lozano-Perez and M. T. Mason: Robot motion: planning and control, 51/71, The MIT Press (1982)
- 2) W.W. Hooker, G. Margulies: The dynamical attitude equations for an n-body satellite, J. astronaut Sci., Vol. 12, 123/128 (1965)
- 3) Stepanenko, Yu. and Vukobratovic, M.: Dynamics of articulated open-chain active mechanisms, Mathematical Biosciences, Vol. 28, Iss. 1/2, 137/170 (1976)
- 4) D. E. Orin, R. B. McGhee, M. Vucobratovic, and G. Hartoch: Kinematic and Kinetic Analysis of Open-Chain Linkages Utilizing Newton-Euler Methods, Mathematical Biosciences, Vol. 43, No. 1/2, 107/130 (1979)
- 5) J. Y. S. Luh, M. W. Walker, and R. P. C. Paul: On-line Computational Scheme for Mechanical Manipulator, Trans. ASME J. Dynam. Syst., Meas. Contr., Vol. 102, 69/76 (1980)
- 6) M. W. Walker and D. E. Orin: Efficient dynamic computer simulation of robotic mechanisms, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 104, 205/211 (1982)
- 7) Y. Huang and C. S. G. Lee: Generalization of Newton-Euler formulation of dynamic equations to nonrigid manipulators, in American Conference Control, 72/77 (1987)
- 8) 中村 仁彦, 山根 克: 拘束条件が不連続に変化するリンク系の動力学—環境と接触しながら運動するヒューマンフィギュアへの応用—, 日本ロボット学会誌, Vol.18, No.3, 435/443 (2000)