ニューラルネットワーク組込型微分方程式を用いたカオス生成

○犬飼陽裕 (岡山大学) 伊藤雄矢 (株式会社ダイヘン) 見浪護 (岡山大学) 矢納陽 (岡山大学)

1. 緒言

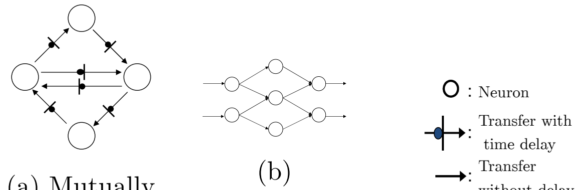
ヤリイカなどの生物の神経細胞においてカオス的な応答がみられるという事実に基づき，カオスを生成するモデルとしてカオスニューロンモデル [1, 2] が提案されている．このモデルでは，ニューロン内部に２次以上の自己再帰性をもっており，ニューロン内部の伝達に時間遅れが発生することでカオスを生成している．この様なニューロン内部の時間遅れを用いてカオスを発生させる方向とは異なるアイデアとして，ニューロン自体は時間遅れのダイナミクスを持たないが，ニューロン間の結合に時間遅れを含みニューラルネットワーク (以降 NN) の構成に依存した再帰的結合により２次以上の時間遅れを伴うことを特徴とするカオス生成モデルも提案されている．複数のニューロンを組み合わせた NN を図１の (a) 相互結合型・リカレント型，(b) 階層型と分類する．図 1(a) では，ニューロン間の結合により時間遅れを発生させることでカオスを生成している [3, 4, 5]．このように，従来のカオス生成手法では，ニューロン内部または結合部の時間遅れによってカオスを生成している．そこで，著者らは図 1(b) のような NN に時間遅れが存在しない階層型 NN を用いた新しいカオス生成手法を提案する．提案するカオス生成手法では，NN を組み込んだ形で非線形微分方程式を表現する．従来のカオス生成手法と異なり，NN 内に時間遅れを存在させていない．甘利，外山らは「脳科学大辞典」[6] に脳の機能や構造についてまとめており，その中で，NN は任意な非線型関数を任意の精度で表現できるということが示されている [7, 8, 9]．その関数表現を微分方程式に組み込むことで，非線型微分方程式の非線型関数部分を多様な形に変化させることができる．本報では，NN 組込型微分方程式を式 (1) のように表す．

$$\dot{\boldsymbol{p}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}(t)) \tag{1}$$

NN には時間遅れを含まないように，式 (1) の $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}(t))$ のみを表現させる．NN の係数を変化させることで，さまざまな非線型関数を表現し，複数のカオス軌道を生成することができる．本報は式 (1) に基づくカオスに関する著者らの研究 [10, 11, 12] をまとめたもので，生成された解軌道のカオス性をリアプノフ指数，ポアンカレリターンマップ，初期値敏感性，フラクタル次元によって検証する．さらに本報では NN の結合係数の変化に対する分岐図の変化について調べ，結合係数の変化に従って多様なカオスが生成されることを明らかにする．

2. カオス生成手法

著者の一人はロボットを用いた魚の捕獲実験 [13] を行い，魚が捕獲されることを防ぐ行動様式を獲得する



(a) Mutually connected and Reccurent (b) Feedforward

図１ニューラルネットワークのモデル

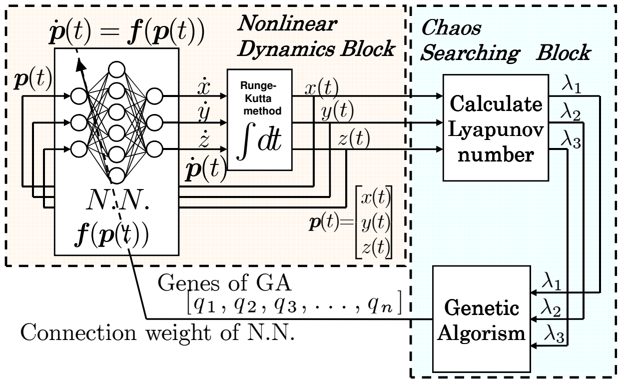


図２カオス生成器のブロックダイアグラム

[14] につれ単純なビジュアルサーボ制御では捕獲が難しくなるということを報告 [15, 16] してきた．本報で議論する複数のカオスの生成手法は，魚の学習能力に対抗できるカオスを用いたロボットの知能化を模索する研究に端を発したものである．

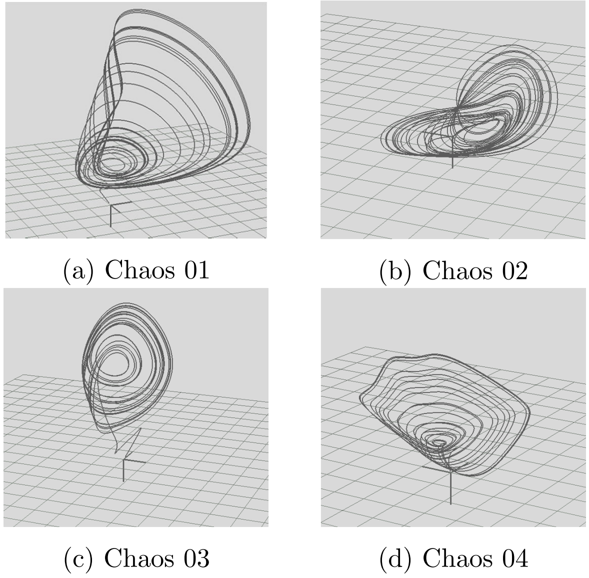
2.1 ニューラルネットワーク組込型微分方程式

入力層，中間層，出力層を持ち $\boldsymbol{p}(t) = [x(t), y(t), z(t)]^{\mathrm{T}}$ から $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}(t))$ への非線形写像を与える NN を考える．NN の出力を式 (1) の $\dot{\boldsymbol{p}}(t) = [\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)]^{\mathrm{T}}$ と考えてルンゲクッタ法を用いて数値積分し $\boldsymbol{p}(t)$ を得る．得られた $\boldsymbol{p}(t)$ を NN の入力にフィードバックし閉ループを構成すると，閉ループ系は式 (1) を表現していることになる．式 (1) を NN を用いて表現したブロック線図を図２に示す．また NN のユニットの入出力関数はシグモイド関数 (式 (2)) を用いている．

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x+\theta}} \tag{2}$$

2.2 カオス生成システム

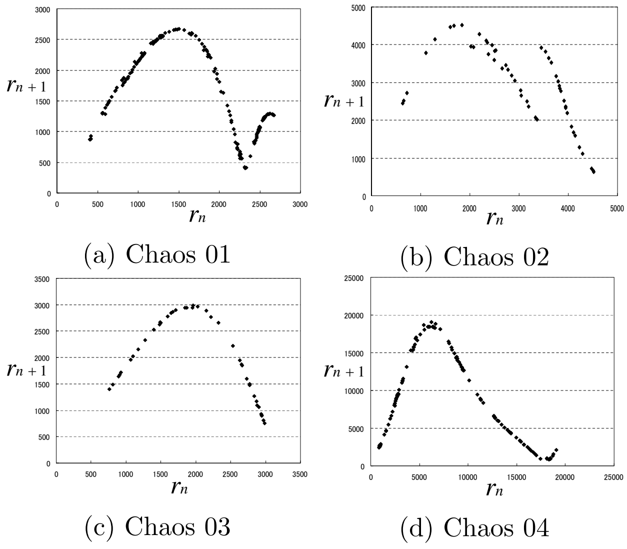
ここでは，図２の左側に示す NN 組込型微分方程式の解軌道がカオス軌道を生成するように，NN の結合係数を探索する方法について考える．カオスを生成する NN の結合係数をジェネティックアルゴリズム (以下 GA) に



(a) Chaos 01 (b) Chaos 02

(c) Chaos 03 (d) Chaos 04

図 3 生成された軌道



(a) Chaos 01 (b) Chaos 02

(c) Chaos 03 (d) Chaos 04

図 4Chaos 01∼04 のポアンカレリターンマップ

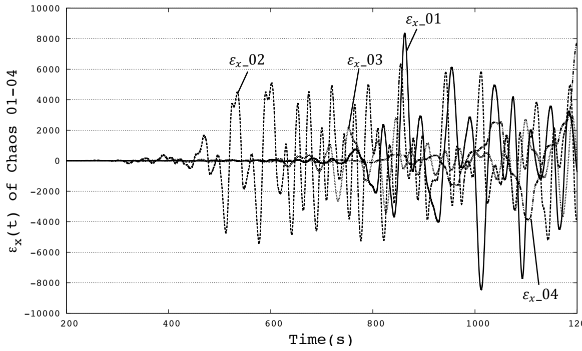


図 5 初期値敏感性 (Chaos 01∼04)

よって探索する．図 2 の右側の“Chaos Seraching Block”は，NN の係数を表すベクトル $\boldsymbol{q}_i = [q_{1i}, q_{2i}, \cdots, q_{ni}]^{\mathrm{T}}$ を遺伝子として持つ GA のブロックであり，次式

$$g_i = k_1 \cdot \lambda_{1i} - k_2 \cdot |\lambda_{2i}| - k_3 \cdot \lambda_{3i}. \tag{3}$$

で与えられる g_i を最大化する $\boldsymbol{q}_i$ を探索する．k_1，k_2，k_3 は正の重み係数である．GA はある遺伝子 $\boldsymbol{q}_i$ を評価するため $\boldsymbol{q}_i$ を NN にセットすることで式 (1) の微分方程式を $\boldsymbol{q}_i$ に基づいた式に固定化する．その後式 (1) を数値積分により解くことで $\boldsymbol{q}_i$ に対応した解軌道 $\boldsymbol{p}_i(t)$ を得る．さらにこの解軌道に関するリアプノフ指数 $\boldsymbol{L}_i = [\lambda_{1i}, \lambda_{2i}, \lambda_{3i}]^T$ を求める．ただし $\lambda_{1i} > \lambda_{2i} > \lambda_{3i}$ としてソートしておく．GA の進化は $\boldsymbol{L}_i$ を用いた式 (3) の適合度関数 g_i を最大化する方向に向かう．カオスを発生させるリアプノフ指数は，リアプノフスペクトラム $(+, 0, -)$ つまり $\lambda_1 > 0, \lambda_2 \fallingdotseq 0, \lambda_3 < 0$ という形をとるため，式 (3) の適合度関数 g_i は $\lambda_{1i} > \lambda_{2i} > \lambda_{3i}$ がリアプノフスペクトラムとなるとき正の大きな値を与えるように構成されている．GA の進化の手法はエリート保存戦略を用いている．GA によって g_i を最大化させることで NN 組込型微分方程式をカオスを発生させる方向へと進化させる．これを繰り返すことで，カオスのリアプノフスペクトラムを満足する軌道を GA によって探索し，カオス軌道の生成を行うことができる [10, 11, 12]．

3. カオス性の検証

3.1 カオス性の判定基準

ここではリアプノフ指数，ポアンカレリターンマップ，初期値敏感性，フラクタル次元について述べる．また，分岐図については 4 章で考察する．

3.1.1 リアプノフ指数

リアプノフ指数とは，力学系においてごく接近した軌道が遠ざかっていく程度を表す指標であり，以下の式で表される．

$$\lambda = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log |f'(x_i)| \tag{4}$$

$\lambda > 0$ のとき，近接した軌道間の距離は，指数関数的に増大することになる．

3.1.2 ポアンカレリターンマップ

ポアンカレリターンマップによって軌道が引き伸ばしと折りたたみの構造を持っているか確認することができる．引き延ばしとは，軌道が収束点から遠ざかる現象で，折りたたみとは軌道が収束点に引き戻される現象である．この構造は，カオスの基本的な性質である．

3.1.3 初期値敏感性

カオスには，微小でも初期値が異なると，解軌道が大きく異なるという特徴がある．この初期値敏感性によって，カオスは決定論的ダイナミクスをもちながらも，長期予測不可能という側面をもつことになる．

3.1.4 フラクタル次元

ここでは，カオスの特徴としてアトラクタの自己相似性を表す指標であるフラクタル次元について調べる．フラクタル次元として相関次元を考える．

表 1 カオス性の検証結果 (Chaos 01∼04)

	Chaos01	Chaos02	Chaos03	Chaos04
Lyapunov number	0.014585 −0.003314 −0.165381	0.01919 −0.00733 −0.10379	0.015934 −0.002172 −0.123026	0.01208 −0.00143 −0.075448
Fractal dimension	1.36058	1.78474	1.89099	1.8799
Poincare return map	図 4(a)	図 4(b)	図 4(c)	図 4(d)
Sensitivity of initial value	図 5			

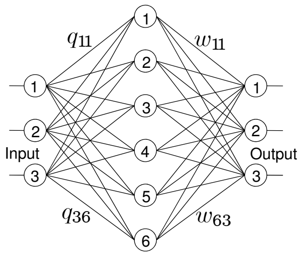


図 6 ニューラルネットワークの構造

3.2　カオス性の検証

GA によって発見された 4 種類の軌道のカオス性の検証を行った．用いた NN の構造を図 6 に示す．発見されたカオスを，カオス 01，02，03，04 と名づけた．図 3(a)∼(d) に軌道を示す．以下でそれぞれの軌道のカオス性を検証する．

3.2.1　カオス 01∼ カオス 04 の検証

カオス 01∼ カオス 04 の特徴を表 1 にまとめた．

- ポアンカレリターンマップ
  ポアンカレ断面を $x-z$ 平面 $(x<0)$ に設定し，軌道とポアンカレ断面との交点と座標原点との距離を r とする．この r のポアンカレリターンマップを図 4 に示す．カオス 01∼ カオス 04 全てで 1 次元写像が確認でき，左側では引き伸ばし，右側で折りたたみの現象が確認できる．
- リアプノフ指数
  リアプノフ指数は上から λ_1，λ_2，λ_3 を示している．この表よりカオス 01∼ カオス 04 のリアプノフスペクトラムは $(+,0,-)$ であることがわかる．
- フラクタル次元フラクタル次元はすべてのカオスで非整数となり，自己相似性を持っていることがわかる．
- 初期値敏感性
  $(x_1(t),y_1(t),z_1(t))$ の軌道は初期値を $x_1(0)=1.00,y_1(0)=1.00,z_1(0)=1.00$，$(x_2(t),y_2(t),z_2(t))$ は初期値を $x_2(0)=1.01,y_2(0)=1.01,z_2(0)=1.01$ とわずかに異なる初期値を与え，$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z$ を $\varepsilon_x=x_1(t)-x_2(t),\varepsilon_y=y_1(t)-y_2(t),\varepsilon_z=z_1(t)-z_2(t)$ で与える．ここでは x 座標の推移の差を ε_x として，Fig.??に示す．$\varepsilon_x\_i(i=01,02,03,04)$ はカオス 01∼04 の x 座標の軌道の差を表している．ここで，$0\sim 250[s]$ の間については，$\varepsilon_x\_02,\varepsilon_x\_03,\varepsilon_x\_04$ ともほぼ零であるため表示していない．どのカオスも差が急に拡大している事がわかる．

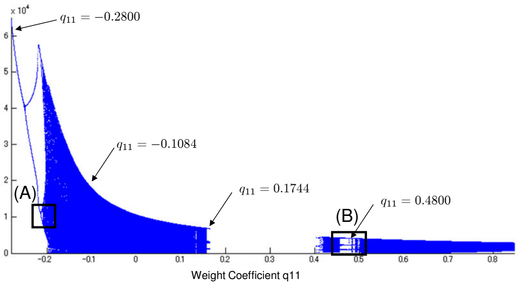


図 7 係数 q_{11} を変化させた時の分岐図

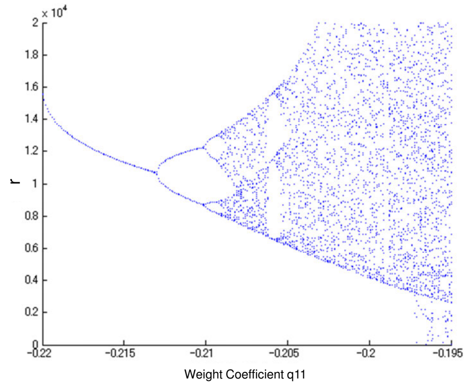


図 8Pitchfork bifurcation ((A) of 図 7)

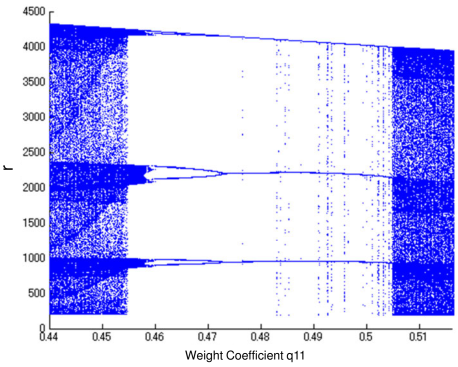


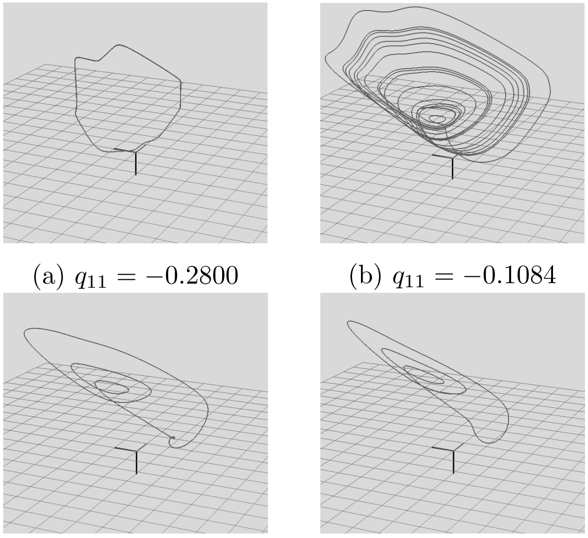
図 9Window with 3 period ((B) of 図 7)

4.　分岐図による検証

4.1　一つの NN 係数の変更による分岐図の作成

ここで，図 6 に示すように入力層における上から i 番目のニューロンと中間層における上から j 番目のニューロンをつなぐ係数を q_{ij}，中間層における上から p 番目のニューロンと出力層における上から q 番目のニューロンをつなぐ係数を w_{pq} と表す．カオス 03 とカオス 04 の NN の係数を比較すると．q_{11} 一つだけが異なることが確認できた．このことから，係数が 1 つ異なるだけで，図 3(c)，(d) のように形が異なるストレンジアトラクタが生成されることがわかる．

そこで，重み係数 q_{11} の値がカオスの生成に大きく関わっているのではないかと考え，重み係数 q_{11} の値を “-1.0” から “$+1.0$” まで 0.0001 刻みで変化させ分岐図を作成した．縦軸はポアンカレリターンマップで使用した距離 r である．このとき，q_{11} 以外の係数はカオス



(a) $q_{11} = -0.2800$ (b) $q_{11} = -0.1084$

(c) $q_{11} = 0.1744$ (d) $q_{11} = 0.4800$

図 10Generated Trajectories

03，04 と同じ値で固定している．図 7 に作成した分岐図を示す．$-1.0 \leq q_{11} \leq -0.28$，$0.18 \leq q_{11} \leq 0.39$，$0.8467 \leq q_{11} \leq 1.0$ の区間では軌道が発散するため，分岐図を描くことができなかった．

4.1.1　熊手型分岐の確認

図 7 における (A) の部分 ($-0.220 \leq q_{11} \leq -0.195$, $0.0 \leq r \leq 20000$) を拡大したものを図 8 に示す．図 8 から，熊手型分岐を確認できる．

4.1.2　カオスの窓の確認

図 7 における (B) の部分 ($0.440 \leq q_{11} \leq 0.5167$, $0.0 \leq r \leq 4500$) を拡大したものを図 9 に示す．図よりカオスの窓を確認できる．

4.1.3　生成される軌道

図7において，q_{11} の値が -0.2800，-0.1084，0.1744，0.4800 であるとき生成される軌道を図 10(a)∼(d) に示す．(a) は 1 周期軌道，(b) はカオス軌道，(c)，(d) は 3 周期軌道となっている．q_{11} の値が -0.1084 のとき，無数の周期をもつ区間ではカオス軌道が生成される．カオス 03，カオス 04 の q_{11} の値はそれぞれ 0.829098955，-0.108415351 となっており，カオスを生成する区間内の値となっている．図 10(a)∼(d) より，NN の係数を変化させることで，軌道の周期が変化し，カオス軌道とカオスでない軌道が生成されることが確認できた．

以上より，カオスを生成する系の特徴である熊手型分岐とカオスの窓を係数 q_{11} を変化させて作成した分岐図より確認できたため，NN 組込型微分方程式によってカオスを生成することができるといえる．また，NN の係数を 1 つでも変更することで，軌道の形が変化していくということが確認された．

5.　結言

本報では，NN を利用した新しいカオス生成手法を提案した．従来のカオス生成手法では時間遅れを利用してカオスを生成しているのに対して，提案手法では NN に時間遅れを存在させずに非線型写像を表現させることでカオス軌道を生成する．この手法により，さまざまな非線型関数を表現することで，多くのカオス軌道を生成することができる．また，生成した軌道のカオス性をリアプノフ指数，ポアンカレリターンマップ，初期値敏感性，フラクタル次元によって検証することで提案手法の有効性を確認した．さらに，分岐図を作成することで，提案手法によって多くのカオスが生成できることを示した．

参考文献

[1] K.Aihara, T.Takebe and M.Toyoda： Chaotic Neural Networks, Phys. Lett. **A**, **144**-6, 333/340 (1990)

[2] 松崎　徹也，中川　匡弘：フラクショナルニューロンモデル，電子情報通信学会論文誌，**J85-A**-11, 1201/1210 (2002)

[3] 川村 暁，吉田 等秋，三浦 守： 通常のニューロンからなるカオス・ニューラルネットワークの最小構成，電子情報通信学会論文誌，**J84-A**-5, 586/594 (2001)

[4] 中村　雄一，川上　博：3 成分系アナログニューラル発振器の分岐現象とカオスアトラクタ，電子情報通信学会論文誌，**J81-A**-10，1345/1351 (1998)

[5] 中村 雄一，佐藤 大祐，船橋 賢一，川上 博： 力学系を近似するニューラルネットワークの構成法，電子情報通信学会技術研究報告，**61**-68 (1999)

[6] 甘利　俊一，外山　敬介：脳科学大辞典，朝倉書店 (2000)

[7] K. Funahashi： On the Approximate Realization of Continuous Mappings by Neural Networks, Neural Networks, **2**, 183/191 (1989)

[8] G. Cybenko： Approximation by superpositions of a sigmoidal function, Math. Control, Signals, and Systems, **2**, 303/314 (1989)

[9] K. Hornik, M. Stinchcombe and H. White： Multilayer feedforward networks are universal approximators, Neural Networks, **2**, 359/366 (1989)

[10] Y. Ito, T. Tomono, M. Minami and A. Yanou: Generating Plural Chaos by Neural-Network-Differential-Equation and Characters, Proc. of SICE Annual Conference, 897/902 (2011)

[11] Y. Ito, T. Tomono, M. Minami and A. Yanou: Multiple Chaos Generator by Neural-Network-Differential-Equation for Intelligent Fish-Catching, Proc. of IEEE Int. Conf. IECON, 2319/2324 (2011)

[12] T. Tomono, Y. Ito, M. Minami and A. Yanou: Analyses of Chaos Generated by Neural-Network-Differential-Equation for Intelligent Fish-Catching, Proc. of IEEE/ASME Int. Conf. on Advanced Intelligent Mechatronics, 1023/1029 (2012)

[13] H. Suzuki, M. Minami: Visual Servoing to catch fish Using Global/local GA Search, IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, **10**-3, 352/357 (2005)

[14] 見浪 護，矢納 陽: ロボットと魚の敵対的関係を用いた魚の学習速度の計測, 日本機械学会論文集（C 編），**79**-801, 1728/1735　(2013)

[15] J. Hirao, M. Minami ,Y. Mae and J. Gao: Emergence of Robotic Intelligence by Chaos for Catching Fish, Proc. of SICE Annual Conference, 969/975 (2007)

[16] Jun Hirao and Mamoru Minami: Intelligence Comparison between Fish and Robot using Chaos and Random, Proc. of Int. Conf. on Advanced Intelligent Mechatronics, 552/557 (2008)

[17] 長島 弘幸，馬場 良和：カオス入門 現象の解析と数理，培風社，(1992)